جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
نهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۷

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۲۴۰	۲۰	۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

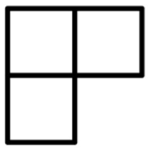
ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای و ۲۰ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- مجموعه ۱ تا ۱۰ چند زیر مجموعه دارد که مجموعه اعضای آن زوج است؟

الف) ۱۲۸ ب) ۲۵۶ ج) ۵۱۱ د) ۵۱۲ هـ) ۵۱۳

۲- حداقل چه تعداد از شکل زیر را می‌توان در یک جدول 5×5 قرار داد، به طوری که شکل‌ها روی هم نیفتد و نتوان شکل دیگری از این نوع را به این جدول افزود؟



الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵
د) ۶ هـ) ۸

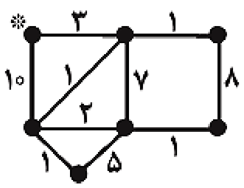
۳- در یک جدول منظور از خانه (i,j) $(i>0, j>0)$ خانه‌ای است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. یک زیر مجموعه S از خانه‌های جدول را یک «مجموعه زیبا» می‌گوییم. اگر به ازای هر خانه (a,b) متعلق به S، تمام خانه‌های (x,y) که $x\le a$ و $y\le b$ نیز در S باشند. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) خانه (۱,۱) عضو هر مجموعه زیبا هست.
ب) اعضای هر مجموعه ناتهی زیبا تشکیل یک مستطیل می‌دهند که خانه (۱,۱) را در بر می‌گیرد
ج) هر اجتماعی از تعدادی مستطیل که همگی شامل (۱,۱) باشند، یک مجموعه ناتهی زیباست
د) الف و ج
هـ) ب و ج

۴- با توجه به تعریف مجموعه زیبا در مسئله قبل، یک جدول 3×3 شامل چند مجموعه زیباست؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ هـ) ۲۰

۵- تعدادی بمب در صفحه قرار داده شده و تعدادی فتیله آن‌ها را مطابق شکل به یکدیگر متصل می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا پس از روشن شدن یک سر هر فتیله، فتیله به طور کامل بسوزد، روی آن نوشته شده است. با توجه به اطلاعات فوق چه مدت پس از منفجر شدن بمبی که در شکل با * مشخص شده است، تمام فتیله‌ها می سوزند؟ توجه داشته باشید که پس از سوخت کامل یک فتیله، بمب‌های هر دو سر آن اگر تا آن زمان منفجر نشده باشند، منفجر خواهند شد.



الف) ۷ ب)۸ ج)۹/۵
د)۱۰/۵ هـ) ۱۲

۶- در یک مسابقه پینگ‌پنگ بین دو دبیرستان A و B، هر دانش‌آموز دبیرستان A با هر دانش‌آموز دبیرستان B یک مسابقه برگزار می‌کند. (مسابقه پینگ‌پنگ تساوی ندارد.) یک دانش‌آموز «برنده مطلق» محسوب می‌شود اگر او هر دانش‌آموز X از هر دو دبیرستان را یا مستقیماً ببرد، یا از دانش‌آموز دیگری مانند Y ببرد و Y از X برده باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) ممکن است برنده مطلق وجود نداشته باشد
ب) برنده مطلق تمام بازی‌هایش را برده است
ج) اگر برنده مطلق وجود داشته باشد حداکثر یک نفر است
د) به هیچ وجه برنده مطلق وجود ندارد
هـ) الف و ب و ج

۷- n تا عدد ۱ روی تخته سیاه نوشته شده است. در هر مرحله دو عدد a و b را از روی تخته پاک می‌کنیم و به جای آن‌ها دو بار عدد $a+b$ را می‌نویسیم. بعد از چند مرحله، اعداد به n تا عدد n تبدیل شده‌اند. n کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۹

الف) ۱ و ۳ ب) ۲ و ۳ ج) فقط ۳ د) فقط ۲ هـ) ۱و۲و۳

۸- دو منبع سوخت با شماره‌های ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که ظرفیت هر کدام ۲۰ لیتر است. سه مصرف‌کننده با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب با مقدار مصرف ۱۲، ۱۲ و ۱۶ لیتر سوخت داریم. هزینه انتقال هر واحد سوخت از منبع i به مصرف‌کننده j در سطر i ام و ستون j ام جدول زیر آمده است. حداقل هزینه انتقال سوخت، برای این که هر مصرف‌کننده به اندازه نیاز خود، سوخت دریافت کند، چه قدر است؟

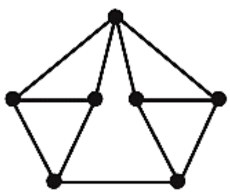
	۱	۲	۳
۱	۱۰	۱	۳
۲	۶	۶	۹

الف) ۱۶۸
ب) ۱۷۲
ج) ۱۷۶
د) ۱۷۸
هـ) ۱۸۰

۹- چهار مثلث متساوی الاضلاع یکسان را در نظر بگیرید. یک مثلث‌بندی یعنی به ترتیب کنار هم قرار دادن مثلث‌ها در صفحه، به طوری که هر مثلث حداقل در یک ضلع، با یکی از مثلث‌های قبلی مشترک باشد و با هیچ یک از آن‌ها هم‌پوشانی نداشته باشد. تعداد مثلث‌بندی‌ها را بشمارید و در این شمارش، مثلث‌بندی‌هایی که با دوران در صفحه به هم تبدیل می شوند را یکبار در نظر بگیرید. این تعداد چند تا است؟

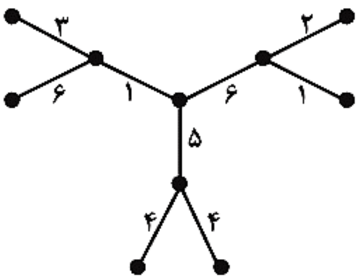
الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۱۰- تعدادی نقطه و پاره‌خط مانند شکل زیر موجود است. رنگ آمیزی نقط را بدین ترتیب تعریف می‌کنیم: به هر نقطه یک رنگ نسبت می‌دهیم، به طوری که دو نقطه که با یک پاره‌خط به هم وصل شده اند، هم‌رنگ نباشند. گزینه صحیح را انتخاب کنید.



الف) می‌توان نقاط را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد
ب) می‌توان نقاط را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد
ج) با حذف هر پاره‌خط، نقاط را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد
د) الف و ب و ج
هـ) ب و ج

۱۱- شکل مقابل نقشه شهرهای یک کشور با جاده‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. در این نقشه، نقاط تو پر نشان‌دهنده شهرها، و پاره‌خط‌های بین آن‌ها نشان‌دهنده جاده‌ها هستند. عددهای روی جاده‌ها، طول جاده‌ها بر حسب کیلومتر را نشان می‌دهند. جهان‌گردی می‌خواهد از یکی از شهرها شروع کند و از همه شهرها بازدید کند. او حداقل چند کیلومتر مسافت را باید طی کند؟



الف) ۴۵ ب) ۴۶ ج) ۴۷ د) ۴۸ هـ) ۵۰

۱۲- در یک جمع ۵ نفری، هر نفر از یک مطلب اطلاع دارد که افراد دیگر از آن مطلب اطلاع ندارند. این افراد می‌توانند با هم جلسات ۳ نفری بگذارند و در هر جلسه همه افراد جلسه، از مطالب همدیگر اطلاع پیدا کنند. حداقل چند جلسه لازم است تا همه از همه مطالب آگاهی پیدا کنند؟

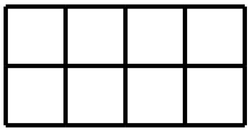
الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۱۳- تعدادی عدد روی تخته نوشته شده. در هر مرحله دو تا از اعداد را پاک می‌کنیم و روی تخته قدرمطلق تفاضل آن دو را می‌نویسیم. در پایان تنها عدد صفر روی تخته باقی مانده است. اعداد اولیه کدام یک از حالت‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۸،۵،۳،۲،۱،۱ ۲) ۱۲،۱۰، ۸،۷،۳،۱ ۳) ۱۸،۱۲،۹،۷،۴،۱

الف) ۱ ب) ۱ و ۲ ج) ۲ د) ۱ و ۳ هـ) ۱ و ۲ و ۳

۱۴- می‌خواهیم در خانه‌های جدول رو به رو ۴ مهره بگذاریم به قسمی که در هر خانه بیش از یک مهره قرار نگیرد و از هر دو خانه‌ای که با هم تنها در یک رأس مشترک هستند، لااقل یکی خالی باشد. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟



الف) ۳ ب) ۵ ج) ۶ د) ۹ هـ) ۱۰

۱۵- ۷ نفر با شماره‌های ۱ تا ۷ در یک صف ایستاده‌اند. میدانیم بین افراد ۱ و ۵ یک نفر، بین افراد ۱ و ۷ سه نفر، بین افراد ۱ و ۳ یک نفر، بین افراد ۲ و ۴ یک نفر و بین افراد ۶ و ۴ یک نفر وجود دارد. این ۷ نفر به چند حالت می‌توانند در صف ایستاده باشند؟

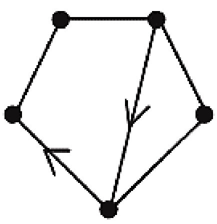
الف) ۴ ب) ۸ ج) ۱۲ د) ۱۴ هـ) ۱۶

۱۶- در خانه‌های مربع مقابل به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۳ را قرار داد به قسمی که در هیچ سطر و هیچ ستون عدد تکراری نداشته باشیم؟

	۳	

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶
د) ۸ هـ) ۱۲

۱۷- در شکل زیر، هر نقطه را یک شهر و هر پاره‌خط را یک جاده بین دو شهر فرض کنید. بعضی از این جاده‌ها به صورت یک طرفه جهت‌دار شده‌اند. می‌خواهیم بقیه این جاده‌ها را طوری به صورت یک طرفه جهت‌دار کنیم که از هیچ شهری نتوان با حرکت روی جاده‌ها، به خودش رسید. به چند طریق این کار ممکن است؟



الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸
د) ۹ هـ) ۱۶

۱۸- دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ از اعداد متمایز، یک دنباله «۲ـ مرتب» نامیده می‌شود اگر به ازای هر $1 \le i \le n-2$ داشته باشیم:
$a_i < a_{i+2}$

اگر یک دنباله ۲ـ مرتب را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، هر یک از عضوهای این دنباله حداکثر چند خانه جابه‌جا می‌شود؟ ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x و $\lceil x \rceil$ یعنی کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی x)

الف) ۲ ب) ۳ ج) $\lfloor n/2 \rfloor$
د) $\lceil n/2 \rceil$ هـ) $n-1$

۱۹- به ازای هر عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ که اختلاف تعداد یک‌ها و تعداد صفرهای آن دقیقاً برابر یک باشد، یک نقطه روی صفحه در نظر می‌گیریم. بین هر دو نقطه که اعداد متناظر با آن‌ها فقط در یک رقم متفاوت باشند، یک پاره‌خط رسم می‌کنیم. تعداد این پاره‌خط‌ها چندتا است؟

الف) صفر　　ب) ۳۵　　ج) ۷۰　　د) ۱۴۰　　هـ) ۱۲۲۵

۲۰- یک تاس یک مکعب است که روی ۶ وجه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است، به قسمی که مجموع اعداد روی وجه‌های روبه‌رو ۷ باشد چند نوع تاس متفاوت داریم؟

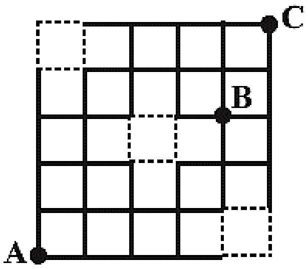
الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۴　　د) ۶　　هـ) ۸

۲۱- دنباله $a_0, a_1, \ldots, a_n$ «متنوع» است، اگر $n=0$ باشد یا هر دو عنصر متوالی دنباله متفاوت باشند و دنباله $a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ هم متنوع باشد.

چند دنباله متنوع برای $n=6$ از اعداد ۰، ۱ و ۲ وجود دارد؟ ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x)

الف) ۳　　ب) ۶　　ج) ۱۲　　د) ۲۴　　هـ) ۳۶

۲۲- در شکل زیر می‌خواهیم با حرکت از روی خطوط جدول، با شروع از نقطه A به نقطه B و نیز مجدداً با شروع از نقطه A به نقطه C برسیم. در هر حرکت می‌توان ۲ یا ۳ واحد به سمت چپ، راست، بالا یا پایین رفت و در ضمن نمی‌توان از خطوط خط چین عبور کرد. تعداد حداقل حرکت‌های لازم برای رسیدن از خانه A به خانه B و برای رسیدن از خانه A به خانه C به ترتیب چند تا است؟

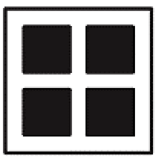


الف) ۳ و ۴　　ب) ۴ و ۵　　ج) ۵ و ۵
د) ۴ و ۴　　هـ) ۴ و ۵

۲۳- یک جدول ۸ × ۸ شامل اعداد طبیعی از مجموعه ۱ تا n است، به طوری که عدد هر خانه از عدد خانه سمت راست و خانه بالایی آن (در صورت وجود) کوچک‌تر است. n لااقل چند است؟

الف) ۸　　ب) ۹　　ج) ۱۵　　د) ۱۶　　هـ) ۳۲

۲۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعدادی نقطه اولیه در قسمت سفید شکل انتخاب کنیم، به قسمی که بتوان هر نقطه‌ای در قسمت سفید را با یک خط مستقیم به حداقل یکی از نقاط اولیه وصل کرد. این خط نباید از قسمت‌های سیاه شکل عبور کند. حداقل تعداد نقاط اولیه چند تا است؟



الف) ۲　　ب) ۳　　ج) ۴
د) ۵　　هـ) ۶

۲۵- اعداد ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۱۸ مجموعه دوبه دوی ۵ عدد طبیعی متفاوت هستند. تعداد اعداد فرد در این ۵ عدد چند تا است؟

الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۳　　د) ۴　　هـ) ۵

۲۶- یک جدول ۱۰×۱ شامل اعداد ۱ تا ۱۰ است، و از هر عدد دقیقاً یکبار در جدول آمده است. در هر مرحله عدد i بین ۱ تا ۱۰ را انتخاب می‌کنیم و اگر محتوای خانه i ام جدول برابر j $(j \neq i)$ بود، محتوای دو خانه i ام و j ام را عوض می‌کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) تعداد تعویض‌ها می‌تواند بی‌نهایت باشد　　ب) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۱۰ است
ج) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۴۵ است　　د) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۹ است
هـ) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۲۰ است

۲۷- به چند طریق می‌توان سه عدد متفاوت از میان اعداد صحیح ۱ تا ۹ انتخاب کرد که مجموع آن‌ها بر سه بخش‌پذیر باشد؟

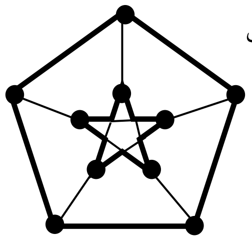
الف) ۲۷ ب) ۲۸ ج) ۳۰ د) ۴۵ هـ) ۸۴

۲۸- شش عدد a,b,c,x,y و z داده شده است. می‌دانیم $a \leqslant b < c$ $x < y < z$ این اعداد را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سومین عدد، کدام یک از اعداد می‌تواند باشد؟

الف) b,y ب) z,c ج) همه اعداد به جز x,a

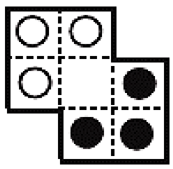
د) همه اعداد هـ) هیچ کدام از گزینه‌های فوق صحیح نیست.

۲۹- شکل زیر نقشه خیابان‌های یک شهر است، که تقاطع‌ها در آن با دایره‌های توپر نشان داده شده‌اند. تعدادی پلیس و یک دزد هر کدام ابتدا در یک تقاطع (نه لزوماً متمایز) قرار دارنـد. دزد و هر یک از پلیس‌ها، با شـروع از دزد، به نوبت حداکثر دو تقاطع را طی می‌کننـد. اگر یک پلیـس بتوانـد در یک نوبت حرکتش، خود را به تقاطعی برساند که دزد در آن قرار دارد، دزد را دستگیر می‌کند. حداق به چند پلیس نیاز داریم تا به ازای هر موقعیت اولیه دزد و پلیس‌ها، مطمئن باشیم که می‌توانیم دزد را دستگیر کنیم؟



الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۳۰- سه مهره سیاه و سه مهره سفید در صفحه‌ای مانند شکل مقابل قرار دارند. دو خانه در این شکل که در یک ضلع یا در یک رأس با هم مشترک باشند را «مجاور» هم می‌نامیم. یک مهره A را می‌توان با یکی از حرکت‌های زیر جابه‌جا کرد:



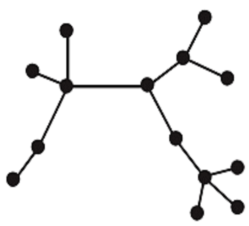
۱) A به خانه مجاورش که خالی است برود.

۲) اگر مهره A، مهره B و خانه خالی به همین ترتیب و در یک راستا (سطری، ستونی یا قطری) باشند، و رنگ B مخالف رنگ A باشد، A می‌تواند با پریدن از روی B به مکان خالی برود.

با حداقل چند حرکت می‌توان جای مهره‌های سیاه و سفید را عوض کرد؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ هـ) ۱۰

۳۱- می‌خواهیم به هر کدام از نقطه‌های توپر در شکل مقابل، یکی از اعداد ۱ تا k را تخصیص دهیم به طوری که هر مسیری که دو نقطه با شماره‌های یکسانِ i را به هم وصل می‌کند، از حداقل یک نقطـه با شمـاره بیشتر از i عبور کند. کمترین مقدار k چقدر است؟



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۳۲- تعداد زیرمجموعه‌های لااقل ۲ عضوی مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۲۰\}$ که مجموع هر دو عضـو متمایـز آن‌ها، از ۲۰ بزرگ‌تر باشـد، چند تا است؟

الف) ۳۰۴۹ ب) ۳۰۷۰ ج) ۴۰۹۴ د) ۴۰۹۵ هـ) ۲۰۴۸

۳۳- یک «عبارت جالب» از نویسه‌های a و b به صورت زیر تعریف می‌شود:

a، ab و ba هر کدام یک عبارت جالب‌اند.

اگر $S_۱$ $S_۲$ دو عبارت جالب باشند $S_۱S_۲$ نیز جالب است.

کدام یک از عبارات زیر جالب است؟

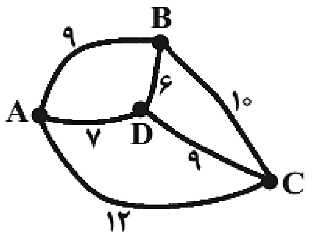
الف) abbaaaabba ب) aaabbabbab ج) bababbaab

د) الف و ب هـ) ب و ج

۳۴- کلیه اعداد ۶ رقمی که با ارقام ۱ تا ۶ ساخته شده‌اند و هیچ رقم تکراری ندارند را از بزرگ به کوچک مرتب کرده‌ایم. عدد ۲۴۳۵۱۶ چندمین آن‌ها است؟

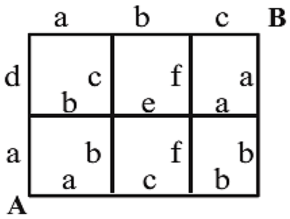
الف) ۱۷۵ ب) ۱۷۶ ج) ۱۷۷ د) ۵۴۳ هـ) ۵۴۴

۳۵- چهار شهر با جاده‌هایی مانند شکل زیر به هم وصل هستند. فاصله یک شهر تا یک شهر دیگر، به صورت عددی بر حسب کیلومتر بر روی جاده‌ای که آن دو شهر را به هم وصل می‌کند نوشته شده است. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه آتش‌نشانی روی جاده‌ها و یا در شهرها ایجاد کنیم. به طوری که برای هر شهر حداقل یک ایستگاه آتش‌نشانی در فاصله حداکثر ۶ کیلومتری آن باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد کم‌ترین تعداد ایستگاه‌های آتش‌نشانی و محل آن‌ها درست است؟



الف) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AD و BC
ب) ۲ ایستگاه بر روجاده‌های AD و AC
ج) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های BD و DC
د) ۳ ایستگاه بر روی جاده‌های BD، AB و AC
هـ) الف و ب

۳۶- در شکل زیر با حرکت به سمت بالا و سمت راست بر روی پاره‌خط‌ها از A به B می‌رویم و در طول حرکت حرف‌های بر روی پاره خط‌ها را به ترتیب کنار هم می‌نویسیم. به این ترتیب، هر حرکت از A به B یک رشته تولید می‌کند. تعداد رشته‌های متفاوتی که به این طریق تولید می‌شوند چند تا است؟



الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸
د) ۹ هـ) ۱۰

۳۷- عدد A را «مولد» عدد B می‌گوییم اگر A به علاوه مجموع ارقامش برابر B شود. مثلاً ۲۷ مولد ۳۶ است. زیرا داریم: ۳۶ = ۷ + ۲ + ۲۷. اعداد ۱۰۱ و ۹۷ به ترتیب چند مولد دارند؟

الف) ۲ و ۰ ب) ۱ و ۱ ج) ۱ و ۰ د) ۱ و ۲ هـ) ۲ و ۲

۳۸- چند دنباله $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ از اعداد ۱ تا ۱۳ وجود دارد که هر عدد دقیقاً یکبار در آن ظاهر شده باشد و نیز a_i از a_{3i-1} و a_{3i+1} کوچک‌تر باشد؟

الف) $\binom{12}{4}^2 \times 6^3$
ب) $\binom{13}{9}^2 \times 3^3$
ج) $\binom{12}{4}^2$
د) $3^3 \times 24$
هـ) $\binom{13}{9}^2$

۳۹- شش وزنه با وزن‌های ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۹ کیلوگرم داده شده‌اند. به چند طریق می‌توان با انتخاب تعدادی از این وزنه‌ها و قرار دادن آن‌ها در یک کفه ترازو، یک جسم با وزن ۱۴ کیلوگرم را در کفه دیگر وزن گرد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۴۰- پنج شهر A، B، C، D و E را در نظر بگیرید. قرار است به هر کدام از شهرهای A، B و C دو جاده و به هر یک از شـهـرهای D و E یک جاده متصل باشـد. به چند طریق می‌توان این شهرها را با تعداد لازم جاده به هم وصل کـرد به طوری که به هر شهر به تعداد فوق جاده متصل باشد و نیز از هر شهر بتوان با حرکت روی جاده‌ها به تمام شهرهای دیگر رفت؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

سؤال‌های بله ـ خیر (۲۰ سؤال)

۴۱- در یک دنباله نوع A، عدد اول دنباله، دلخواه است و بعد از آن هر عدد به صورت حاصل ضـرب مـجـمـوع ارقـام عـدد قبل در یکی از مقسوم علیه‌های همان عدد است. مثلاً عدد بعد از ۳۵ می‌تواند ۴۰ باشد. چون مجموع ارقام ۳۵ برابر ۸ است و ۵ یکی مقسوم علیه ۳۵ می‌باشد.

آیا ممکن است در دنباله‌ای که با ۱۴۴ شروع می‌شود، عدد ۸۰۹۲ ظاهر شود؟

۴۲- در یک دنباله نوع B، عدد اول دلخواه است و بعد از آن هر عدد به صورت حاصل ضرب دو تا از مقسوم علیه‌های (نه لزوماً متمایز) عدد قبل از آن است. مثلاً عدد بعد از ۷۲ می‌تواند ۵۴ باشد چون ۹ و ۶ مقسـوم علیـه ۷۲ هسـتند. آیا ممکن است در دنباله‌ای که با ۱۸۰ شروع می شود عدد ۳۳۷۵ ظاهر شود؟

۴۳- سه ماده اولیه دارویی A، B و C را در نظر بگیرید. هر نوع دارو با نسبت مواد A، B و Cی موجود در آن مشخص می‌شود. مثلاً در داروی (۶ و۵و۴) مواد A، B و C به ترتیب با نسبت‌های ۴، ۵ و ۶ مخلوط شده‌اند. می‌خواهیم ببینیم از یک مجموعه دارو آیا می‌توان یک داروی مشخص جدید ساخت یا خیر. مثلاً از مجموعه داروهای (۳ و ۵ و ۱) و (۶ و ۵ و ۴) می‌توان داروی (۵ و ۵ و ۳) را تولید کرد. برای این کار کافی است داروهای این مجموعه را با نسبت ۱ و ۲ ترکیب کنیم. آیا از مجموعه داروهای (۱ و ۷ و ۳) و (۳ و ۲ و ۱) می‌توان داروی (۵ و ۴ و ۳) را ساخت؟

۴۴- بر روی دنباله $a_1, a_2, \dots, a_8$ اعمال زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

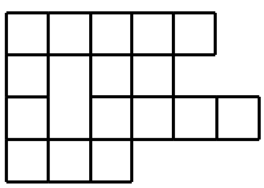
۱) $a_1, a_2, \dots, a_5$ را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

۲) $a_3, a_4, \dots, a_8$ را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

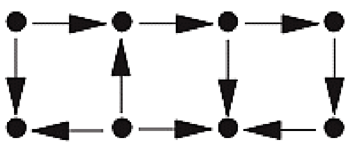
۳) $a_1, a_2, \dots, a_5$ را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

آیا این دنباله حتماً به ترتیب صعودی مرتب شده است؟

۴۵- آیا می‌توان شکل مقابل را ز روی خطوط برید، به طوری که بتوان با قرار دادن دو تکه به دست آمده در کنار هم یک مربع ۴×۴ ساخت؟ (منظور از برش، تقسیم شکل از روی خطوط به دو قسمت یک پارچه است).



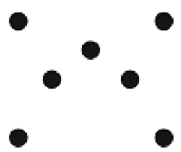
۴۶- آیا می‌توان به هر نقطه شکل روبه‌رو، یک عدد طبیعی نسبت داد، به قسمی که اگر از نقطه مربوط به عدد A، یک فلش به نقطه مربوط به عدد B وجـود داشته باشـد، آنگاه A بر B بخش‌پذیر باشد؟



۴۷- بازی XO را به این صورت تعریف می‌کنیم: در یک مربع ۳ × ۳ بازیکن اول در نوبت خود یک X و بازیکن دوم یک O در جای خالی می‌گذارد. کسی بازی را می برد که یک سطر، یک ستون و یا یک قطر از مهره‌های خود به دست آورد. آیا بازیکن دوم می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده شود؟

۴۸- مجموعه‌ای از توپها با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند. به قسمی که از هر رنگ لااقل یک توپ داریم. این توپها یک کیلویی یا دو کیلویی هستند. به صورتی که از هر وزن لااقل یک توپ داریم. آیا لزوماً دو توپ یافت می‌شوند که هم از نظر رنگ و هم از نظر وزن متفاوت باشند؟

۴۹- نقطه C را قرینه نقطه A، نسبت به نقطه B می‌گوییم، در صورتیکه B وسط AC باشد. در عمل قرینه کردن A نسبت به B، نقطه A حذف و نقطه C به شکل اضافه می‌شود. در شکل مقابل آیا می‌توان با انجام تعدادی عمل قرینه کردن نقطه‌ها نسبت به یکدیگر، مجموعه رئوس یک ۷ ـ ضلعی محدب را به دست آورد؟



۵۰- یک جدول ۶ × ۱ را در نظر بگیرید که در هر خانه آن یک سکه به رو قرار دارد. در هر مرحله دو خانه مجاور را انتخاب کرده و سکه‌های موجود در آن خانه‌ها را پشت و رو می‌کنیم. این کار را آنقدر انجام می‌دهیم تا سکه‌های موجود در همه خانه‌ها به پشت برگردند. در این صورت کار متوقف می‌شود. آیا کار پس از دقیقاً ۲۰ مرحله، می‌تواند متوقف شود؟

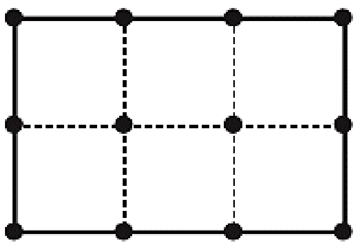
۵۱- یک جدول ۱۰ × ۱۰ مفروض است. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر بازیکن به نوبت یک عدد ۱ تا ۱۰ را در یکی از خانه‌های خالی جدول می نویسد، با این شرط که در سطر و ستونی که آن خانه قرار دارد قبلاً این عدد نوشته نشده باشد. بازیکنی که در نوبت خود نتواند عددی در یکی از خانه‌های جدول بنویسد، بازنده و نفر دیگر برنده است. در صورتی که هر دو بازیکن بهتر حرکت خود را انجام دهند، آیا نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده بازی باشد؟

۵۲- مجموع دو عدد بر مبنای معکوس به این صورت تعریف می شود: ابتدا ارقام دو عدد را معکوس می‌کنیم، سپس دو عدد را جمع می‌کنیم و سرانجام ارقام حاصل جمع را معکوس می‌کنیم. مثلاً مجموع ۱۰۳ و ۶۵ در مبنای معکوس برابر ۷۵۳ می‌باشد

(۳۰۱ + ۵۶ = ۳۵۷)

و نیز مجموع ۱۰۳ و ۹۵ در مبنای معکوس برابر ۶۳ است (۳۶۰ = ۵۹ + ۳۰۱). آیا ممکن است مجموع دو عدد طبیعی A و B در مبنای معکوس برابر یکی از آن دو (A یا B) شود؟

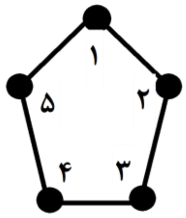
۵۳- در یک بازی دو نفره (نقطه‌بازی بدون جایزه و یا با کادر دورا) هر نفر در نوبت خود یکی از خطوط نقطه‌چین را پررنگ می‌کند. در هر نوبت به تعداد مربعهایی که بعد از حرکت یک بازیکن، تمام اضلاع آنها پررنگ شده‌اند، به وی امتیاز داده می‌شود. دو بازیکن یک در میان بازی می‌کنند. در پایان، کسی که امتیاز بیشتری آورده باشد، برنده است. در شکل مقابل اگر هر دو بازیکن بهترین حرکت‌های ممکن را انجام دهند، آیا بازیکن اول می‌تواند همیشه برنده باشد؟



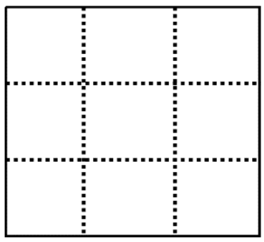
۵۴- یک جدول با اندازه ۱۰ × ۱۰ با اعداد صفر، ۱ و ۱- پر شده است. آیا چنین جدولی وجود دارد که مجموع اعداد هر سطر ، هر ستون و هر یک از دو قطر آن همگی با هم متفاوت باشند؟

۵۵- در یک مهمانی ۱۴ نفر حضور دارند. می‌دانیم که هر یک از مهمان‌ها حداکثر ۴ نفر از مهمان‌های دیگر را می‌شناسد، و نیز می‌دانیم که بین این افراد دقیقاً ۲۱ مورد آشنایی دو جانبه وجود دارد. آیا حالتی وجود دارد که این افراد بتوانند به گونه‌ای دور یک میز بنشینند که هر کس نفر سمت راست خود را بشناسد و با نفر سمت چپ نا آشنا باشد؟

۵۶- می‌خواهیم به هر یک از رئوس ۵ ـ ضلعی زیر یک رنگ از سه رنگ a، b یا c را نسبت دهیم به طوری که رئوس دو سر یک ضلع هم‌رنگ نباشند. می‌دانیم که این رنگ‌آمیزی را می‌توان به صورت‌های مختلف انجام داد. حال می‌خواهیم برای رنگ‌آمیزی «محدودیت» ایجاد کنیم. هر محدودیت شامل یک شماره رأس و یک رنگ است و معنی آن، این است که رأس مذکور نمی‌تواند با آن رنگ، رنگ‌آمیزی شود. آیا می‌توان ۵ محدودیت برای این شکل ایجاد کرد به قسمی که با رعایت آن‌ها رئوس ۵ ـ ضلعی دقیقاً به یک صورت رنگ‌آمیزی شود؟

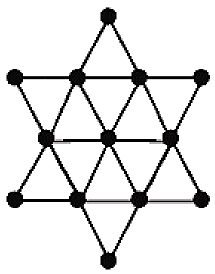


۵۷- شکل مقابل را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را به این صورت انجام می‌دهند:
ابتدا نفر اول در امتداد یکی از خط‌چین‌ها شکل را به دو قسمت تقسیم می‌کند و یکی از آن‌ها را حذف کرده، دیگری را به نفر دوم می‌دهد. نفر دوم هم در امتداد یکی از خط‌چین‌ها آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند و یکی از آن‌ها را حذف کرده، دیگری را به نفر اول می‌دهد. این عمل تکرار می‌شود تا زمانی که دیگر نتوان شکل را تقسیم کرد. بازیکنی که نتواند عمل تقسیم را انجام دهد بازنده است. در صورتی که هر دو بازیکن بهترین حرکات را انجام دهند، آیا نفر اول می‌تواند برنده بازی شود؟



۵۸- در شکل مسئله قبل بازی دیگری به صورت زیر تعریف می‌کنیم. ابتدا نفر اول در امتداد یکی از خط‌چین‌ها شکل را به دو قسمت تقسیم می‌کند. سپس نفر دوم یکی از قسمت‌ها را حذف می‌کند و قسمت دیگر را به دو بخش تقسیم می‌کند. سپس نفر اول یکی از قسمت‌ها را حذف می‌کند و قسمت دیگر را به دو بخش تقسیم می‌کند. بازی به همین صورت ادامه می‌یابد تا زمانی که بازیکنی نتواند شکل را تقسیم کند و می‌بازد. در صورتی که هر دو بازیکن بهترین حرکات را انجام دهند، آیا نفر اول می‌تواند برنده بازی شود؟

۵۹- شکل زیر نقشه خیابان‌های یک شهر است. در یک تقاطع یک دزد و در تقاطعی دیگر یک پلیس قرار دارد. دزد و پلیس به نوبت (ابتدا دزد) از یک تقاطع به تقاطع مجاور (که بینشان یک خیابان فاصله است) می‌روند.
اگر پلیس بتواند در نوبت حرکتش خود را به تقاطعی برساند که دزد در آن قرار دارد می‌تواند دزد را بگیرد. آیا با هر موقعیت دزد و پلیس در ابتدا، پلیس می‌تواند دزد را بگیرد؟

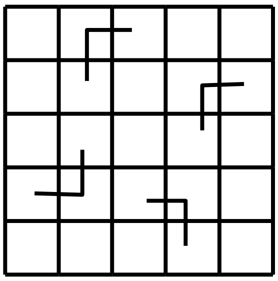


۶۰- رشته abbaaabb را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم به ازای یک i ی دلخواه، جای حرف iام رشته را با حرف i+۲ ام رشته (در صورت وجود) عوض کنیم. آیا پس از تعدادی مرحله ممکن است به رشته abbaabab برسیم؟

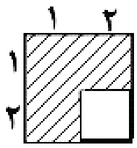
«پاسخ تشریحی نهمین المپیاد کامپیوتر»

۱- مجموعه ۱۰ عضوی دارای $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ زیرمجموعه است که مجموعه اعضای نصف آن‌ها زوج و مجموعه اعضای نصف دیگر فرد است. پس جواب مورد نظر ۵۱۲ می‌باشد.

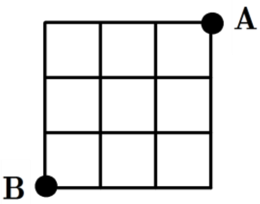
۲- هر یک از شبکه‌های ۲×۲ موجود در گوشه‌های مربع چنان باید باشند که حداقل دو خانه از هر یک از آن‌ها پر شود زیرا در غیر این صورت شکل داده شده در آن جا می‌شود و در ضمن نمی‌توان شکلی چنان قرار داد که از خانه‌های دو تا از شبکه‌های مورد بحث را بپوشاند. بنابراین حداقل ۴ شکل لازم است. با ۴ شکل می‌توان مطابق جدول بالا به مطلوب رسید.

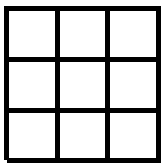


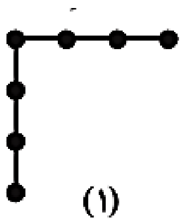
۳- برای گزینه الف مثال نقضِ تهی وجود دارد. برای گزینه ب مثال نقض مانند شکل مقابل وجود دارد.

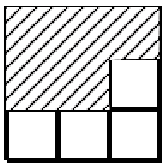


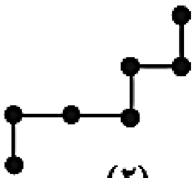
۴- به ازای هر مسیر با طول مینیمم (طول ۶) از A به B یک و فقط یک مجموعه زیبا یافت می‌شود. به عنوان مثال برای مجموعه زیبای a (تهی) مسیرِ ۱ و برای مجموعه زیبای b مسیرِ ۲ متناظر هستند.




(a)

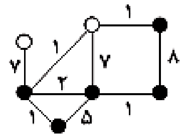

(۱)

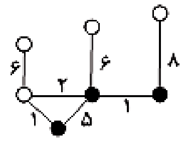

(b)

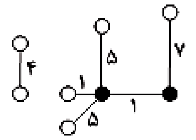

(۲)

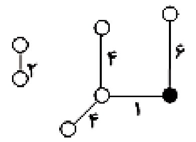
تعداد مسیرهای مطلوب در یک شبکه $m\times n$ برابر $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix}\right]$ و در این مسئله برابر $\left[\begin{matrix} ۶ \\ ۳ \end{matrix}\right]$ یعنی ۲۰ می‌باشد.

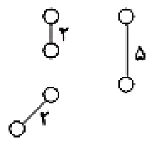
۵- وضعیت بمب‌ها و فتیله‌ها پس از سپری شدن اوقات مختلف مطابق شکل مقابل می‌باشد. مکان‌هایی که آتش در آن‌ها باشد با دایره توخالی نشان داده شده است.

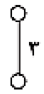
۳ :


۴ :


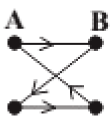
۵ :


۶ :


۷ :


۸ :


۶- برای صحت گزینه الف شکل مقابل وجود دارد:



اگر بازیکن i از A از بازیکن j از B باخته باشد آنگاه i نمی‌تواند برنده مطلق باشد زیرا بازیکن‌هایی که j را برده‌اند از دبیرستان A بوده و با i بازی نکرده‌اند. پس بازیکنی که حتی یک باخت داشته باشد نمی‌تواند برنده مطلق باشد. اگر بازیکن‌های i و j هر دو برنده مطلق باشند آنگاه i و j نمی‌توانند در دو دبیرستان متفات باشند زیرا اگر i از j برنده باشد آنگاه j حداقل یک باخت داشته و نمی‌تواند برنده مطلق باشد. و اما اگر i و j از یک دبیرستان باشند و هر دوتای آن‌ها همه دانش‌آموزان دبیرستان دیگر را برده باشند آنگاه بازیکن i بازیکن j را به واسطه نبرده است و نمی‌تواند برنده مطلق محسوب شود.

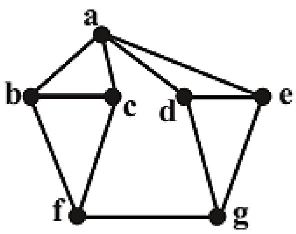
۷- شیوه ساخته شدن n عدد n از روی n عدد ۱ را در نظر می‌گیریم. با عمل کردن به شیوه عکس به n عدد ۱ می‌رسیم. به این منظور n عدد n را دو به دو در نظر گرفته و اعداد تولیدکننده آن‌ها را می‌نویسیم. اگر n فرد باشد یک عدد n باقی‌مانده و هرگز از آن ۱ تبدیل نخواهد شد. پس شرط لازم برای رسیدن به مطلوب آن است که n زوج باشد. برای $n = ۱۶$ شیوه زیر را عمل می‌کنیم:
ابتدا ۱۶ عدد را دو به دو در نظر گرفته و آن‌ها را به ۱۶ عدد ۲ و سپس آن‌ها را به ۱۶ عدد ۴ و سپس آن‌ها را به ۱۶ عدد ۸ و در نهایت با دسته‌بندی آن اعداد در ۸ زوج دوتایی آن‌ها را به ۱۶ عدد ۱۶ تبدیل می‌کنیم.

۸- طریقه تقسیم سوخت‌ها مطابق شکل مقابل می‌باشد:

	۱	۲	۳
۱	–	۴	۱۶
۲	۱۲	۸	–

۹- تمام مثلث‌بندی‌های مطلوب به شکل زیر می‌باشد:

لازم به ذکر است که شکل‌های اول و آخر با دوران در فضا قابل تبدیل به هم هستند ولی با دوران در صفحه به هم نمی‌توانند تبدیل شوند.

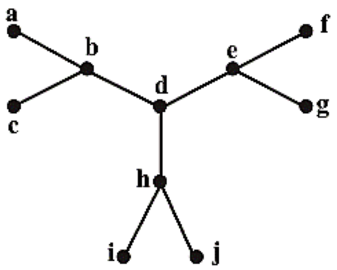


۱۰- سه رأس a، d و e سه رنگ متمایز دارند و نیز سه رأس g، d و e نیز سه رنگ متمایز دارند، بنابراین اگر بخواهیم رئوس را فقط با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه a و g هم‌رنگ خواهند بود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که a و f هم‌رنگ هستند که در این صورت دو رأس f و g که به هم وصل هستند هم‌رنگ شده و با فرض داده شده تناقض ایجاد می‌کند. شکل داده شده را با ۴ نوع رنگ به شکل زیر می‌توان رنگ کرد:

آبی: b,e　　　سبز: a,g

زرد: f　　　قرمز: d,c

و همچنین قابل بررسی است که با حذف هر یال رنگ‌آمیزی شکل با سه رنگ امکان‌پذیر است.



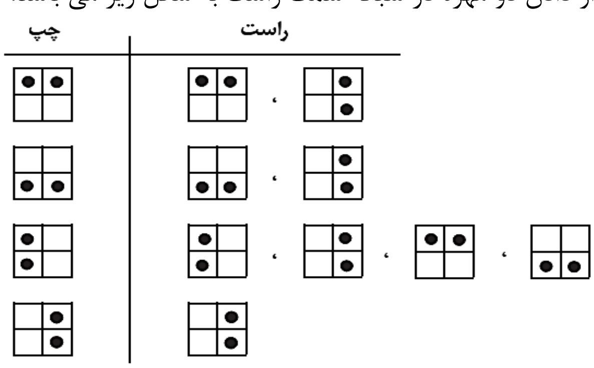
۱۱- مسیری که طول آن ماکزیمم باشد مسیر اصلی در نظر می‌گیریم که با توجه به اعداد داده شده مسیرِ fedhi مسیر اصلی می‌باشد. با محاسبه معلوم می‌شود که در این حالت مجموع مسافات پیموده شده برابر ۴۷ کیلومتر می‌شود.

۱۲- اگر افراد را a، b، c، d و e در نظر بگیریم معلوم است که با تشکیل سه جلسه abc، edc و abc می‌توان به منظور رسید.

۱۳- شرط لازم برای رسیدن به مطلوب آن است که مجموع اعداد اولیه زوج باشد، زیرا در هر مرحله دو برابر عدد کوچکترِ حذف شده از مجموع اعداد کم شده و در نهایت به صفر می‌رسد. مجموع اعداد موجود در هر یک از حالات ۲ و ۳ فرد بوده و شرط لازم را ندارد و اما رسیدن به منظور در حالت اول به شیوه زیر می‌باشد:

۸,۵,۳,۲,۱,۱ ← ۳,۳,۲,۱,۱ ← ۳,۱,۱,۱ ← ۲,۱,۱ ← ۱,۱ ← ۰

۱۴- معلوم است که در هر یک از دو شبکه ۲×۲ موجود در سمت چپ و نیز سمت راست شکل حداکثر دو مهره می‌تواند قرار گیرد و چون در شکل دقیقاً ۴ مهره موجود است پس در هر یک از آن شبکه‌ها دقیقاً ۲ مهره موجود خواهد بود. طرق قرار دادن دو مهره در شبکه سمت چپ و به دنبال آن قرار دادن دو مهره در شبکه سمت راست به شکل زیر می باشد:



۱۵- با اطلاعات داده شده معلوم می‌شود که افراد فرد و زوج یک در میان هستند، یعنی در شکل مقابل مربع ها با اعداد فرد و دایره‌ها با اعداد زوج پر شده‌اند:

□○□○□○□

دایره وسط یقیناً عدد ۴ می‌باشد بنابراین به دو حالت دو دایره دیگر را می‌توان با اعداد ۲ و ۶ پر کرد. یکی از دو مربع میانی عدد ۱ می‌باشد یعنی به دو حالت می‌توان عدد ۱ را پر کرده و به تناسب آن عدد ۷ مکانِ منحصر به فرد پیدا خواهد کرد به این صورت که اگر عدد ۱ در مربع دوم (یا سوم) از سمت چپ قرار گیرد عدد ۷ در مربع چهارم (یا اول) از سمت چپ قرار خواهد گرفت. و در نهایت در دو مربع باقی‌مانده دو عدد ۳ و ۵ را به دو حالت می‌توان قرار داد که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر $۲ \times ۲ \times ۲$ یعنی ۸ خواهد شد.

۱۶- خانه B را به دو طریق و به تناسب آن خانه A را نیز به دو طریق می‌توان پر کرد، پس از پر کردن آن دو کل جدول به صورت منحصر به فرد پر می شود، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۲×۲ یعنی ۴ می‌باشد.

A	B	
	۳	

۱۷- هر یک از دو زوج یال‌های موجود در سمت چپ و راست شکل را به طور مستقیم از یکدیگر به سه طریق می‌توان جهت‌دار کرد. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر ۳×۳ یعنی ۹ می باشد.

۱۸- بیشترین جابجایی موقعی اتفاق می‌افتد که دنباله به صورت $a_۱b_۱\ a_۲b_۲\dots a_kb_k$ یا $a_۱b_۱\ a_۲b_۲\dots a_kb_ka_{k+۱}$ بوده و هر دو دنباله a_i ها و b_i ها صعودی بوده و b_k از $a_۱$ کوچک‌تر باشد، در این صورت دنباله صعودی مورد نظر به شکل $b_۱b_۲\dots b_ka_۱a_۲\dots a_k$ یا $b_۱b_۲\dots b_ka_۱a_۲\dots a_{k+۱}$ مرتب می‌شود و بیشترین جابه‌جایی در این حالت مربوط به b_k است که به اندازه k واحد یا $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ واحد جا به جا شده است.

۱۹- تعداد اعداد ۷ رقمی در مبنای ۲ که تعداد ۱های آن‌ها ۴ و تعداد ۰های آن‌ها ۳ باشد برابر $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ یعنی ۲۰ است (زیرا رقم سمت چپ قطعاً است). این اعداد را دسته A می‌نامیم.

تعداد اعداد ۷ رقمی در مبنای ۲ که تعداد ۱های آن‌ها ۳ و تعداد ۰های آن‌ها ۴ باشد برابر $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$ یعنی ۱۵ می‌باشد. (زیرا رقم سمت چپ قطعاً ۱ است).

این اعداد را دسته B می‌نامیم.

هر عدد از دسته A دقیقاً به سه عدد از B متصل می شود (رقم یک موجود در سمت چپ عدد را نمی‌توانیم صفر کنیم ولی اگر هر رقم یک دیگر موجود در آن عدد را صفر کنیم یک عدد از دسته B تولید می‌شود). بنابراین تعداد کل پاره‌خط‌های تولید شده برابر ۳×۲۰ یعنی ۶۰ خواهد شد، که متأسفانه در گزینه‌ها نیامده است.

۲۰- تاس را چنان روی زمین قرار می‌دهیم که عدد ۶ روی زمین و عدد ۵ سمت راست قرار گیرد که در این حالت یقیناً عدد ۱ بالا و عدد ۲سمت چپ قرار خواهد گرفت. دو حالت پیش می‌آید، عدد ۳ مقابل بوده و عدد ۴ پشت باشد و یا برعکس.

۲۱- با توجه به تعریف دنباله متنوع معلوم می‌شود که شرط لازم برای متنوع بودن دنباله $a_۰, a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶$ آن است که دنباله $a_۰, a_۲, a_۴, a_۶$ و به دنباله آن دنباله $a_۰, a_۴$ متنوع باشند. چون هر دو عضو متوالی یک دنباله متمایز هستند پس عدد $a_۰$ را به ۳

طریق و عدد a_4 را به دو طریق از بین اعداد ۰، ۱ و ۲ می‌توان انتخاب کرد یعنی ۶ نوع دنباله متنوع متمایز به صورت a_0, a_4 وجود دارد. در دنباله a_0, a_2, a_4, a_6 پس از معلوم شدن a_0, a_4 عضو a_2 به یک طریق (چون در وسط قرار گرفته است) و عضو a_6 به دو طریق (متمایز با a_4) مشخص می‌شوند. چون ۶ نوع دنباله متمایز a_0, a_4 ایجاد شده بنابراین طبق اصل ضرب ۲×۱×۶ یعنی ۱۲ دنباله متنوع به صورت a_0, a_2, a_4, a_6 می‌توان ایجاد کرد. چون در دنباله اولیه هر یک از اعضای a_3, a_2, a_1 بین دو عضو دیگر قرار گرفته‌اند پس هر یک از آن‌ها به صورت منحصر به فرد مشخص خواهند شد، بنابراین جواب مورد نظر ۱۲ می‌باشد.

۲۲- شیوه حرکت برای رسیدن به B در بهترین حالت به شکل زیر می‌باشد:

۱. سه واحد بالا ۲. دو واحد پایین ۳. دو واحد راست

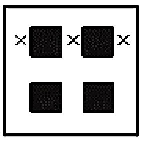
۴. دو واحد راست ۵. دو واحد بالا

شیوه حرکت برای رسیدن به C نیز در بهترین حالات به شکل زیر می‌باشد:

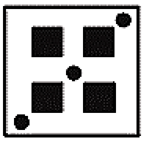
۱. سه واحد بالا ۲. دو واحد راست ۳. دو واحد بالا ۴. سه واحد راست

۲۳- اگر ستون اول را از پایین به بالا با اعداد ۱، ۲، ...، ۸ و همچنین سطر آخر را با همان اعداد از چپ به راست پر کنیم آنگاه اعداد موجود در قطر فرعی از پایین به بالا به ترتیب برابر ۱، ۳، ۵، ...، ۱۵ خواهد شد. به راحتی معلوم می‌شود که مابقی اعداد همگی اعدادی بین ۱ و ۱۵ می‌باشند.

۲۴- اگر سه نقطه مطابق شکل (۱) در نظر بگیریم معلوم می‌شود که هیچ دوتایی از آن‌ها نقطه اولیه مشترک ندارند بنابراین وجود حداقل سه نقطه اولیه الزامی است. اگر سه نقطه اولیه مطابق شکل (۲) باشند آنگاه تمام نقاط سفید رنگ پوشش داده می‌شوند.



(۱)



(۲)

۲۵- اگر تعداد فردها را a و تعداد زوج‌ها را $5-a$ در نظر بگیریم آنگاه تعداد اعداد فرد تولیدشده برابر $\left|\begin{matrix}a\\1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}5-a\\1\end{matrix}\right|$ خواهد شد، بنابراین:

$$\left|\begin{matrix}a\\1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}5-a\\1\end{matrix}\right| = 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 1 \quad a = 4$$

اگر $a = 1$ یعنی فقط یک عدد فرد داشته باشیم و آن را x و اعداد زوج را y_1،y_2،y_3 y_4 بنامیم آنگاه:

$$x + y_1 = 7 \qquad x + y_3 = 11$$
$$x + y_2 = 9 \qquad x + y_4 = 15$$

از تساوی‌های فوق معلوم می‌شود که اعداد زوج به ترتیب به صورت y_1، y_1+2، y_1+4 و y_1+8 می‌باشند معلوم است که کوچک‌ترین اعداد یعنی ۸ را دو عدد y_1 و y_1+2 تولید می‌کنند بنابراین $2y_1 + 2 = 8$ یا $y_1 = 3$ و این با زوج بودن y_1 در تضاد است.

۲۶- در هر مرحله تعویض، عدد i در خانه i قرار می‌گیرد یعنی در هر مرحله تعویض حداقل یک عنصر در جای خود قرار می‌گیرد بنابراین حداکثر ۹ تعویض لازم است (لازم به ذکر است که اگر دقیقاً ۹ عدد در جایگاه خود باشند عدد دهم نیز بـه نـاچـار در جـایـگاه خـود خواهد بود).

۲۷- اعداد را به شکل زیر به سه دسته A، B و C تقسیم می‌کنیم:

$$A : ۳,۶,۹$$
$$B : ۲,۵,۸$$
$$C : ۱,۴,۷$$

برای آن که مجموع اعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد لازم است هر سه عدد از یک دسته بوده و یا هر یک از آن اعداد از یک دسته باشند بنابراین:

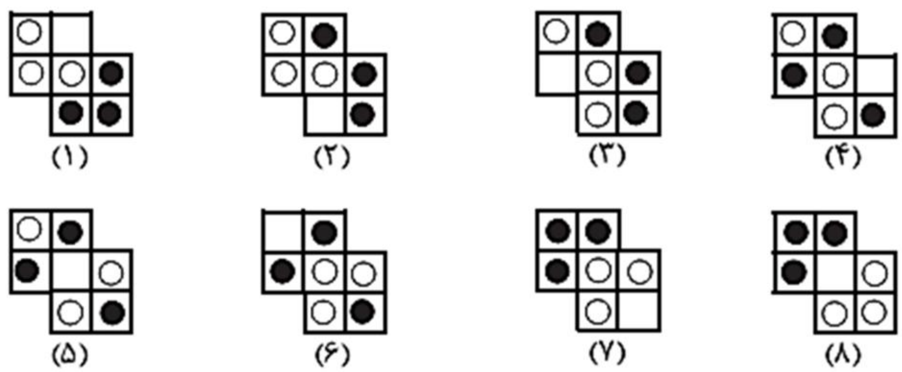
$$? = ۳ \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۳ + ۲۷ = ۳۰$$

۲۸- در هر یک از شش حالت زیر به ترتیب a، b، c، x، y و z سومین عضو دنباله می‌باشند:

۱) $x < y < a < z < b < c$
۲) $x < a < b < c < y < z$
۳) $a < b < c < x < y < z$
۴) $a < b < x < y < z < c$
۵) $a < x < y < z < b < c$
۶) $x < y < z < a < b < c$

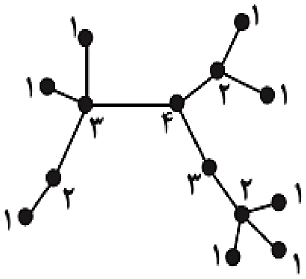
۲۹- اگر تعداد پلیس‌ها ۲ باشد دزد همیشه برای فرار راهی در پیش دارد (چون هر تقاطع سه راه است) و اما اگر تعداد پلیس‌ها ۳ باشد آن سه می‌توانند در هر شرایطی خود را به جایی رسانند که دزد را محاصره کرده و او را دستگیر کنند.

۳۰- بهترین حرکت به شکل زیر است که ۸ مرحله طول می‌کشد:



برای ورود مهره‌های سفید به خانه‌های جدید ۳ حرکت و برای ورود مهره‌های سیاه به خانه‌های جدید ۳ حرکت لازم است (مجموعاً ۶ حرکت). چون در انتقال مهره‌ها ناگزیر از خانه وسط کمـک می‌گیریـم بنابراین دو حرکت نیز برای ورود مهره به خانه وسط (که متمایز از حرکات قبلی است) لازم است (مراحل اول و ششم). لازم به ذکر اسـت که با یـک بار ورود و خروج یک مهـره به خانه وسط (نه بیشتر) تعـداد حرکات لازم بیش از ۸ شده و مطلوب نمی‌باشد. با جمع زدن تعداد حرکات فوق معلوم می‌شود که برای رسیدن به مطلوب حداقل ۸ حرکت لازم است.

-۳۱ بهترین حالت ممکن به شکل رو به رو می‌باشد:



-۳۲ کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه مطلوب را i می‌نامیم که دو حالت پیش می‌آید:

I) $1 \le i \le 9$. در این حالت هیچ یک از اعضای $i+1, i+2, \ldots, 20-i$ نمی‌توانند در آن زیرمجموعه باشند و اما هر یک از اعضای $20-i+1, 20-i+2, \ldots, 20$ دو حالت در آن زیرمجموعه می‌توانند داشته باشند، عضو بودن در آن زیرمجموعه و یا عضو نبودن آن (حالتی که هیچ یک از آن اعضا عضو زیرمجموعه مورد نظر نباشند را نمی‌شماریم زیرا در این صورت زیرمجموعه مورد نظر فقط شامل i بوده و یک عضوی است). بنابراین در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر $2^i - 1$ می‌باشد.

II) $10 \le i \le 10$. در این حالت همه اعضا بزرگ‌تر از i دو حالت در آن زیرمجموعه می‌توانند داشته باشند، عضو بودن در آن زیرمجموعه و یا عضو نبودن آن (حالتی که هیچ یک از آن اعضا عضو زیرمجموعه مورد نظر نباشند را نمی‌شماریم). بنابراین در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر $2^{20-i} - 1$ خواهد شد.

با در نظر گرفتن دو حالت فوق تعداد کل زیرمجموعه‌های مطلوب به شکل زیر پیدا خواهد شد:

$$? = \left[(2^1-1)+(2^2-1)+\ldots+(2^9-1)\right]+\left[(2^{10}-1)+(2^9-1)+\ldots+(2^1-1)\right]$$
$$= 2^{10}+2(2^1+2^2+\ldots+2^9)-19 = 2^{10}+2(2^{10}-2)-19$$

-۳۳ به راحتی قابل درک است که در یک عبارت جالب تعداد bها نمی‌تواند از تعداد aها بیشتر باشد بنابراین گزینه ج نمی‌تواند صحیح باشد.

همچنین یک عبارت جالب نمی‌تواند به صورت ...bbabb... باشد زیرا اگر a به همراه bی سمت راست خود آمده باشد آنگاه در سمت چپ آن bb و اگر a به همراه bی سمت چپ خود آمده باشد آنگاه در سمت راست آن bb نمی‌تواند تولید شود.

-۳۴ تمام اعدادی که رقم سمت چپ آن‌ها ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد قبل از عدد داده شده می‌باشند، تعداد این اعداد بر $4\times5\times4\times3\times2\times1$ یعنی ۴۸۰ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آن‌ها ۲ و رقم دومشان ۵ یا ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد نیز برابر $1\times2\times4\times3\times2\times1$ یعنی ۴۸ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آن‌ها ۲ و رقم دومشان ۴ و رقم سومشان یکی از ارقام ۵ یا ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $1\times1\times2\times3\times2\times1$ یعنی ۱۲ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آن‌ها ۲ و رقم دومشان ۴، رقم سومشان ۳ و رقم چهارمشان ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $1\times1\times1\times1\times2\times1$ یعنی ۲ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول، دوم، سوم و چهارم آن‌ها به ترتیب ۲، ۳ و ۵ بوده و رقم پنجمشان ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $1\times1\times1\times1\times1\times1$ یعنی ۱ می‌باشد.

بنابراین مجموعاً $1+2+12+48+480$ یعنی ۵۴۳ عدد قبل از عدد داده شده قرار دارد و عدد مطلوب پانصد و چهل و چهارمین عدد می‌باشد.

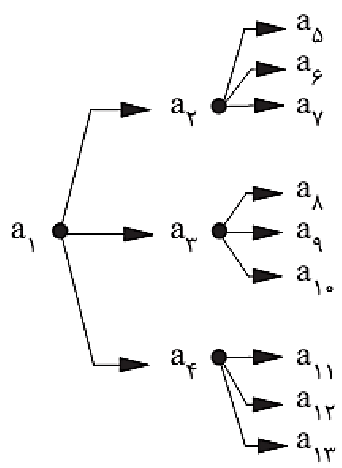
۳۵- یکی از سه حالت زیر می‌تواند جواب باشد:

۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AB و DC
۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AD و BC
۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AC و BD

۳۶- تعداد کل مسیرهای اشاره شده برابر $\binom{۵}{۲}$ یعنی ۱۰ می‌باشد که هر یک برای خود دنباله‌ای را تولید می‌کنند که دنباله‌های abcbc، abefc و abeaa هر یک دوبار تولید می‌شوند. بنابراین تعداد کل دنباله‌های متمایز تولید شده برابر ۳ − ۱۰ یعنی ۷ خواهد شد.

۳۷- عدد ۹۷ هیچ مولدی ندارد و اما مولدهای عدد ۱۰۱ اعداد ۱۰۰ و ۹۱ می‌باشند.

۳۸- باید درخت موجود در شکل مقابل را تکمیل کنیم(« $x \bullet\!\!\longrightarrow y$ نشانگر آن است که عدد x از عدد y کوچک‌تر است.) عدد $a_۱$ کوچک‌ترین عدد ممکن یعنی ۱ می‌باشد. حال ۱۲ عدد باقی‌مانده را به سه دسته چهارتایی تقسیم می‌کنیم تا به شاخه‌های $a_۱$ اختصاص دهیم که این کار بـه $\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۴}$ طریق ممکن است. در بین دسته اول کوچک‌ترین عدد را به $a_۲$ و سه عدد دیگر را به !۳ طریق بین $a_۵$ و $a_۶$ و $a_۷$ تقسیم می‌کنیم. دسته‌های دیگر را نیز به همین صورت بین a_iهای باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم، بنابراین جواب مورد نظر برابر $(۳!)^۳ \times \binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}$ خواهد شد که جواب صحیح در بین گزینه‌ها نیامده است.



۳۹- تمام حالات ممکن به شکل زیر می‌باشد:

I) ۹,۵ II) ۹,۳,۲ III) ۷,۵,۲

۴۰- شهر متصل به D یکی از شهرهای A، B یا C می‌باشد زیرا اگر D به E متصل باشد آنگاه شهر D به غیر از E به هیچ شهر دیگری مسیر نخواهد داشت. به همین صورت E نیز به یکی از شهرهای A، B یا C (به غیر از شهری که D به آن متصل است) وصل خواهد بود. بنابراین تعداد جواب‌های ممکن برابر ۳ × ۲ یعنی ۶ خواهد بود.

۴۱- چون عضو اولِ دنبـاله یعنی ۱۴۴ بر ۹ بخش‌پذیر است پس مجموع ارقام آن نیز بر ۹ بخش‌پذیر بـوده و حاصل ضرب آن مجموع در هر مقسوم علیهی باز مضرب ۹ خواهد بود به همین ترتیب معلوم می‌شود که همه اعضای دنباله مضرب ۹ می‌باشـــد در حالی که عدد ۹۲ ۸۰ مضرب ۹ نمی‌باشد.

۴۲- اعضای دنباله را به به شکل زیر می‌سازیم:

$$a_1 = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad a_2 = (5^1)\times(3^2\times 5^1) = 3^2 \times 5^2$$
$$a_3 = (3^2\times 5^1)\times(3^2\times 5^2) = 3^3\times 5^3 = 3375$$

۴۳- فرض می‌کنیم α برابرِ داروی اول را با β برابرِ داروی دوم مخلوط کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{r} 3\alpha+\beta=3 \\ 7\alpha+2\beta=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha=-2 \ , \ \beta=9$$
$$\alpha+3\beta=5$$

از دو معادله اول مقادیر α و β به ترتیب برابر ۲- و ۹ به دست می‌آیند که اولاً منفی بودن α بی‌معنی است و ثانیاً مقادیر به دست آمده در معادله سوم صدق نمی‌کنند.

۴۴- در مرحله دوم دنباله a_6, a_7, a_8 صعودی است و چـون آن ســه عدد از a_3, a_4, a_5 بزرگ‌تر بوده و طبق عمل اول این سه عدد نیز از a_1, a_2 بزرگ‌ترنـد پس از عمل دوم a_6, a_7, a_8 به همین ترتیب بزرگ‌ترین اعداد می‌باشند. در مرحله سوم نـیـز پـنـج عـضو نخست به‌ترتیب صعودی نوشته می‌شوند.

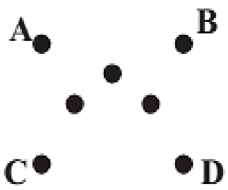
۴۵- مطابق شکل مقابل:

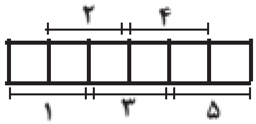
۴۶- به همه نقاط عدد یکسانِ n را نسبت دهید.

۴۷- ابتدا بازیکن اول یک X در خانه وسط قرار می‌دهد که در این صورت بازیکن دوم فقط می‌تـواند در دو سـتـون اول و سـوم و یا در دو سطر اول و سوم برنده شود. اما در هر خانه‌ای که بازیکن دوم O قرار دهد در سطر یا ستون مربوطه نفر اول یک X قرار داده و مانع از برنده شدن نفر دوم می‌شود.

۴۸- اگر در بین توپ‌های آبی هم یک کیلویی داشته باشیـــم و هم دو کیلویی، آنگاه از توپ‌های قرمز را انتخاب می‌کنیم این توپ چه یک کیلویی باشد و چه دو کیلویی، مسئله را حل می‌کند. و اما اگر همه توپ‌های آبی یک کیلویی (یا دو کیلویی) باشند آنگاه قطعاً در بین توپ‌های قرمز توپ دو کیلویی (یا یک کیلویی) وجود دارد.

۴۹- کافی است قرینه نقطه A را نسبت به C و قرینه نقطه B را نسبت به نقطه D به دست آوریم.





۵۰- خانه‌ها را مطابق شکل مقابل به زوج‌های ۱ تا ۵ تقسیم می‌کنیم. برای اینکه خانه سمت چپ از رو به پشت تبدیل شود باید زوج ۱ فرد بار انتخاب شود. برای اینکه خانه دوم از سمت چپ از رو به پشت تبدیل شود باید فرد بار انتخاب شود یعنی تعداد انتخاب‌های زوج ۲ و ۱ بر روی هم فرد باشد و چون تعداد انتخاب‌های زوج ۱ فرد بار بود، تعداد انتخاب‌های زوج ۲ باید زوج بار باشد. به همین ترتیب معلوم می‌شود تعداد انتخاب‌های زوج ۳ فرد، تعداد انتخاب‌های زوج ۴ زوج بار و بالاخره تعداد انتخاب‌های زوج ۵ فردبار خواهد بود. بنابراین تعداد کل انتخاب‌ها برابر «فرد + زوج + فرد + زوج + فرد» یعنی فرد می‌تواند باشد.

۵۱- شبکه ۱۰×۱۰ نقطه‌ای در وسط به صورت مرکز تقارن دارد. هر عددی که بازیکن اول در یک خانه قرار دهد بازیکن دوم همان عدد را در قرینه آن خانه نسبت به نقطه مورد اشاره قرار می‌دهد و هرگز بازنده نمی‌شود.

۵۲- A را برابر ۱۲ و B را برابر ۹۸۱ در نظر می‌گیریم:

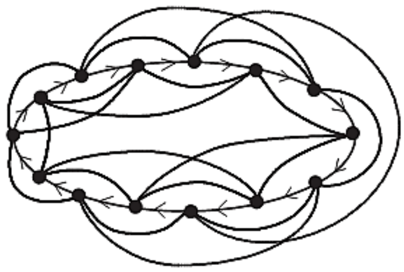
A=۱۲=مجموع A و B در مبنای معکوس $\longrightarrow$ ۲۱+۱۸۹=۲۱۰

۵۳- اگر بازیکن اول پاره‌خط وسط را رسم کند یقینا برنده می‌شود.

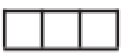
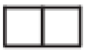
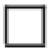
۵۴- بزرگ‌ترین مجموع برابر ۱۰+ و کوچک‌ترین مجموع برابر ۱۰- می‌باشد و در این فاصله مجموعاً ۲۱ عدد صحیح وجود دارد، در حالی که

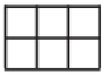
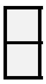
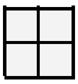
تعداد سطرها، ستون‌ها و دو قطر بر روی هم ۲۲ می‌باشد بنابراین حداقل یک عضو تکراری خواهیم داشت.

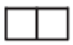
۵۵- در شکل مقابل یال‌های جهت‌دار نشانگر آشنایی‌های یک‌طرفه و یال‌های بدون جهت نشانگر آشنایی‌های دو طرفه است.

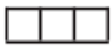
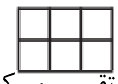
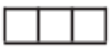
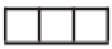
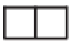


۵۶- محدودیت‌های لازم می‌تواند به شکل $(۱,a)$،$(۱,b)$،$(۲,a)$،$(۳,g)$ $(۴,c)$ باشد.

۵۷- اگر نفر اول شکلی به صورت  را تحویل نفر دوم دهد آنگاه نفر دوم شکل  را حذف و  را تحویل نفر اول دهد و برنده می‌شود.

اگر نفر اول شکلی به صورت  را تحویل نفر دوم دهد و نفر دوم شکل  را حذف و شکل  را تحویل نفر اول می‌دهد.

نفر اول به ناچار شکلی به صورت  تحویل نفر دوم داده و سپس شکلی به صورت  از او تحویل گرفته و بازنده می‌شود.

۵۸- نفر اول شکل را به دو قسمت  و  تقسیم می‌کند، نفر دوم اولی را حذف و دومی را به دو شکل به صورت  و  تقسیم می‌کند. نفر اول یکی را حذف و دیگری را به ناچار به صورت  و  تقسیم می‌کند.

نفر دوم اولی را حذف و دومی را به صورت  و  تقسیم کرده و برنده می‌شود.

۵۹- فرض می‌کنیم در ابتدا دزد و پلیس در دو تقاطع مجاور باشند چون شروع حرکت با دزد است، ابتدا دزد به تقاطعی که پلیس در آن است می‌رود و از آن به بعد به هر تقاطعی که پلیس رود، دزد به همان تقاطع می‌رود.

۶۰- هرگز bهای مجاور هم نمی‌توانند از هم جدا شوند.